FICELLES EN FOLIE

(Année 2016-2017)

Élèves :

VEY Naïs : 6ème
SILVESTRE Séréna : 6ème
BENTOUMIA Tim : 6ème
TOLA Lise : 5ème
FATH Hiba : 5ème
CADOUX Alexiane : 5ème
BERTHUIT Nicolas : 4ème
DOULET Scander : 4ème
BELMADANI Ahlem : 2nde
PAVILI Alicia : 2nde

Enseignants :

François Denizou
Cécile Hess

Chercheur :

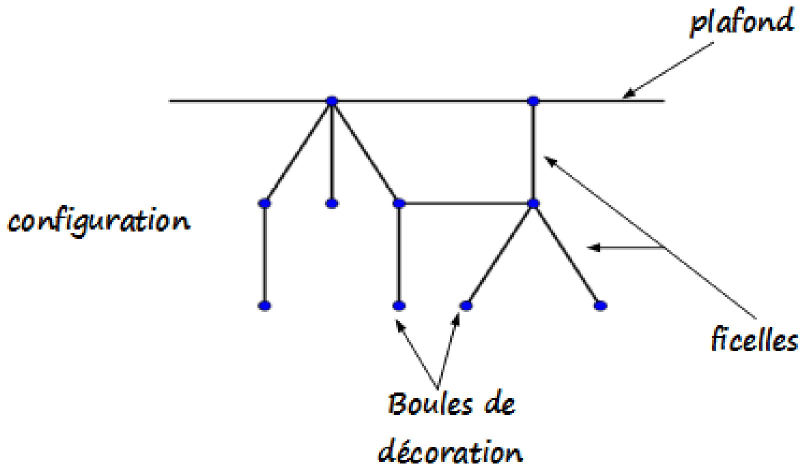
Daniel Hirschkoff (ENS Lyon)

Établissement :

Cité scolaire Lacassagne

Règles du jeu

~ Deux joueurs.
~ Des boules sont reliées par des ficelles accrochées à un plafond.



Règle du jeu: Les joueurs retirent une ficelle tour à tour.

But du jeu: NE PAS RETIRER LA DERNIÈRE FICELLE !

Une configuration A est une configuration où le joueur qui joue en premier possède une stratégie qui lui permet de gagner.

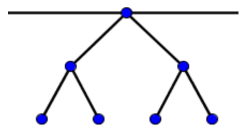
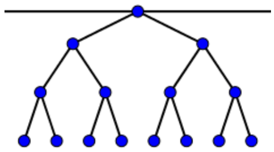
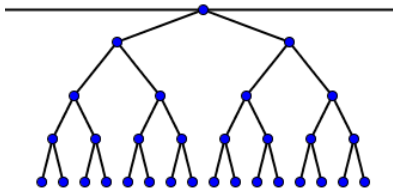
Une configuration B est une configuration où le joueur qui joue en deuxième gagne qu'importe ce que joue le premier.

Les chercheurs nous ont proposé plusieurs configurations et nous devions trouver si c'étaient des configurations A ou B

Notation : Dans tout l'article, nous noterons J1 le joueur qui joue en 1er, et J2 le joueur qui joue en 2ème.

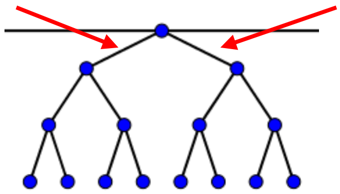
Les arbres

Pour dessiner cette configuration, il suffit de toujours doubler le nombre de ficelles en allant vers le bas. On peut reproduire cette étape indéfiniment.

			…
Arbre 1	Arbre 2	Arbre 3	….

La configuration des arbres est une configuration où le joueur qui commence gagne forcément s' il applique une certaine stratégie : c'est une configuration A.

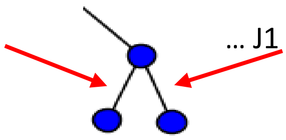
Afin de gagner à tous les coups, le premier joueur doit pour son premier tour retirer une des deux ficelles les plus hautes :



Puis au cours de la partie il va toujours enlever la ficelle qui est en face de celle que le deuxième joueur a enlevée.

<u>Exemple</u> :

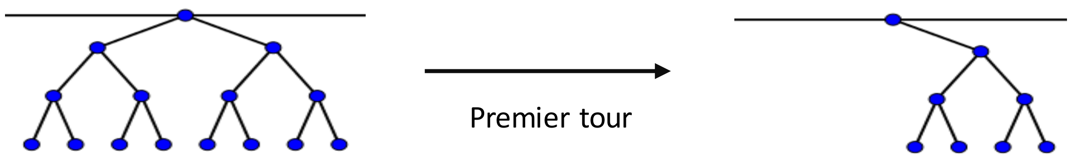
Si J2 enlève cette ficelle…



… J1 enlève celle-ci

<u>Pourquoi cette strategie fonctionne -t-elle toujours ?</u>

En retirant la moitié des ficelles, le premier joueur laisse toujours un nombre impair de ficelles (qui était pair au début).



Nombre pair

Nombre impair

Puis en retirant toujours la ficelle en face de celle que le deuxième joueur a enlevée, le premier joueur ramène le nombre de ficelles à un nombre impair.

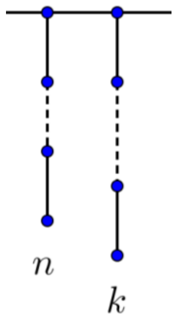
Le nombre de ficelles diminue petit à petit mais le nombre de ficelles reste toujours impair quand c'est au 2ème joueur de jouer, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une ficelle.

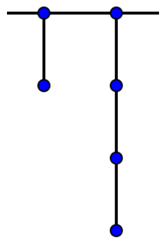
<u>Le deuxième joueur a perdu !</u>

Les deux chaînes

On a deux chaînes de longueurs n et k.
Dans quels cas la configuration est-elle A, dans lesquels est-elle B ?

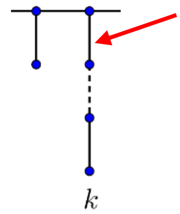
Notation :





On note cette configuration (*n* ; *k*)   Par exemple, on a ici la configuration (1 ; 3)

Étude des différents cas :

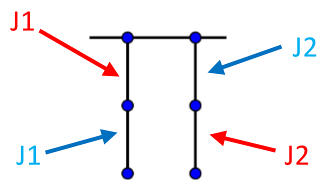


- **Premier cas** : n = 1 et k ≥ 1 : configuration (1 ; k).
  C'est une **configuration A**.

Démonstration :
J1 joue (1 ; 0) donc il gagne. On a bien une configuration A.

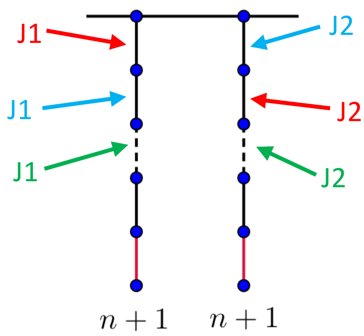
- **Deuxième cas** : Si les chaînes sont de longueurs égales, c'est-à-dire n = k, alors c'est une **configuration B**.

Démonstration :
Utilisation d'un raisonnement par récurrence



- Initialisation pour n = 2 (configuration (2 ; 2))
  - Si J1 joue (0;2), J2 joue (0;1).
  - Si J1 joue (1;2), J2 joue (1;0).

  Dans les deux cas, J2 gagne. On a donc une configuration B.
- Hérédité
  On suppose que toutes les configurations (k ; k) pour 2 ≤ k ≤ n sont B.
  Démontrons que (n+1 ; n+1) est une configuration B.



  - Si J1 joue (0 ; n+1), J2 joue (0 ; 1).
  - Si J1 joue (1 ; n+1), J2 joue (1 ; 0).
  - Sinon, si J1 joue (k ; n+1) avec 2 ≤ k ≤ n, J2 joue (k ; k).
    Par hérédité, c'est une configuration B.

  Stratégie de J2 : jouer « en face » de J1

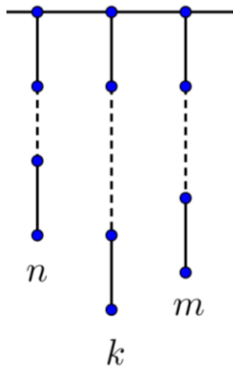
  Ainsi, dans tous les cas, qu'importe ce que joue J1, J2 gagne.
  On a bien une configuration B pour (n+1 ; n+1).
- Conclusion : Toutes les configurations (n ; n) avec n ≥ 2 sont des **configurations B**.

- **Troisième cas** : Si k > n > 1, alors (n ; k) est une **configuration A**.

Démonstration :
À partir du cas précédent, on peut prouver que cette configuration est A : J1 a une ***stratégie : il égalise d'abord les chaînes donc joue (n ; n)*** pour revenir à la configuration des chaînes égales où J2 joue en premier donc J1 gagne.

Les trois chaînes

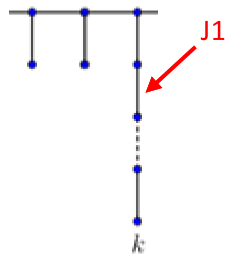
On a trois chaînes de longueur n, k et m que l'on note $(n ; k ; m)$
Dans quels cas la configuration est-elle A, dans lesquels est-elle B ?



- **Premier cas :** Si les chaînes sont toutes de longueur 1 (configuration (1 ; 1 ; 1)), alors c'est une **configuration B**.

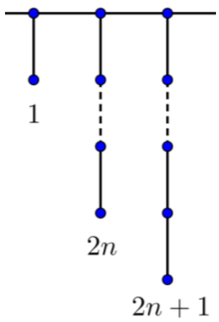
Démonstration :
Si J1 joue (1 ; 1 ; 0) J2 joue (1 ; 0 ; 0) donc gagne. On a une configuration B.

- **Deuxième cas** : Si $n = m = 1$ et $k > 1$ $(1 ; 1 ; k)$ alors c'est une **configuration A**.



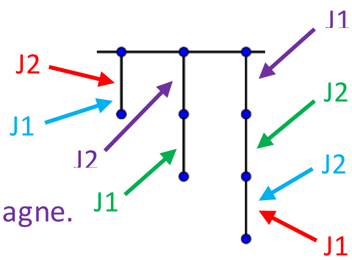
Démonstration :
J1 joue (1 ; 1 ; 1). Retour au cas précédent où J2 joue en premier donc J1 gagne. On a bien une configuration A.

- **Troisième cas** : Si la configuration est $(1 ; 2n ; 2n+1)$ alors c'est une **configuration B**.



Démonstration :
Utilisation d'un raisonnement par récurrence.

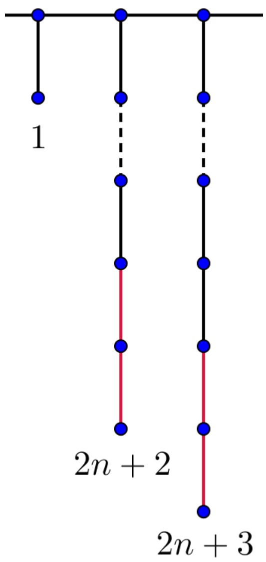
- Initialisation : configuration (1 ; 2 ; 3)
  - Si J1 joue (1 ; 2 ; 2) alors J2 joue (0 ; 2 ; 2). Retour au cas des deux chaînes égales où J1 joue en premier, J2 gagne.
  - Si J1 joue (0 ; 2 ; 3) J2 joue (0 ; 2 ; 2), retour au cas des chaînes égales. J2 gagne.
  - Si J1 joue (1 ; 1 ; 3) [ou (1 ; 2 ; 1)] alors J2 joue (1 ; 1 ; 1), retour au premier cas des trois chaînes, donc J2 gagne.
  - Si J1 joue (1 ; 2 ; 0) [ou (1 ; 0 ; 3)] alors J2 joue (1 ; 0 ; 0) et gagne.



Dans tous les cas le joueur 2 gagne, c'est donc une **configuration B**.

- <u>Hérédité</u>
  On suppose que (1 ; 2k ; 2k+1) est une configuration B pour $2 \leq k \leq n$. Si l'on ajoute deux ficelles aux deux dernières chaînes, a-t-on toujours une configuration B ?

  On a (1 ; 2(n+1) ; 2(n+1)+1), c'est-à-dire (1 ; 2n+2 ; 2n+3).

  - Si J1 joue (0 ; 2n+2 ; 2n+3), retour au cas des deux chaînes de longueurs différentes où J2 joue en premier donc J2 gagne.
  - Si J1 joue (1 ; 2n+2 ; 2n+2) J2 joue (0 ; 2n+2 ; 2n+2). Retour au cas des chaînes égales où J1 joue en premier, il gagne.
  - Si J1 joue (1 ; 0 ; 2n+3) ou (1 ; 2n+2 ; 0) J2 gagne en jouant (1 ; 0 ; 0).
  - Si J1 joue (1 ; 2k ; 2n+3) ou (1 ; 2n+2 ; 2k) avec $1 \leq k \leq n$, J2 joue (1 ; 2k ; 2k+1). J2 gagne par hérédité.
  - Si J1 joue (1 ; 2n+2 ; 2k+1) ou (1 ; 2k+1 ; 2n+3) avec $1 \leq k \leq n$, J2 joue (1 ; 2k ; 2k+1) et gagne par hérédité.

Dans tous les cas, qu'importe ce que joue J1, J2 gagne.

- <u>Conclusion</u> : On a bien une **<u>configuration B</u>** pour toutes les configurations (1 ; 2n ; 2n+1) avec $n \geq 1$.

➢ **<u>Quatrième cas</u>** : La configuration (1 ; 2n+2 ; 2n+3) est une **<u>configuration A</u>**.

Démonstration :

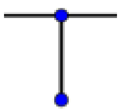
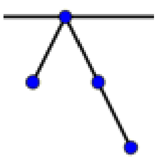
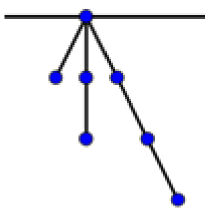
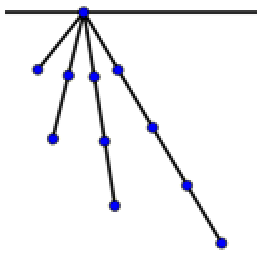
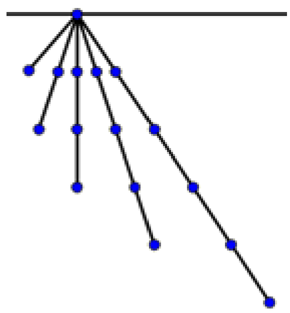
À partir du cas précédent, on peut prouver que cette configuration est A.
J1 a une stratégie : **il revient au cas précédent donc à (1 ; 2n+2 ; 2n+1)** où J2 joue en premier donc J1 gagne.

➢ **<u>Cas général</u>** : Nous n'avons pas trouvé de réponse.

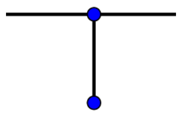
<u>Les éventails</u>

Les éventails sont composés d'une suite de branches, elle mêmes composées d'un nombre croissant de ficelles.

<u>Exemple</u> : Le premier éventail comporte une branche composée d'une seule ficelle ; l'éventail 2 est composé de deux branches, l'une comportant une ficelle et l'autre deux ; et ainsi de suite pour les figures suivantes.

Éventail 1	Éventail 2	Éventail 3	Éventail 4	Éventail 5
				

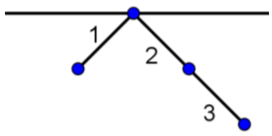
A) L'éventail 1



Configuration B

Stratégie gagnante : Dans cette configuration, il n'y a pas vraiment de stratégie ; le premier joueur est forcé de retirer la première et dernière ficelle : donc il perd forcément.

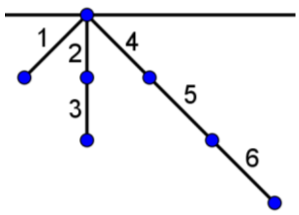
B) L'éventail 2



Configuration A

Stratégie gagnante : Pour gagner, le premier joueur doit retirer la ficelle 2 ; il ne reste alors qu'une ficelle au tour du second joueur.

C) L'éventail 3



Configuration B

Ce cas correspond au cas (1 ; 2 ; 3) des 3-chaînes.
On a donc déjà démontré que c'était une configuration B.
Rappel de la **stratégie gagnante** pour le joueur 2 :

Si J1 joue 1 ➡ J2 joue 6 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 5
J1 joue 3 ➡ J2 joue 4
J1 joue 4 ➡ J2 joue 3
J1 joue 5 ➡ J2 joue 2
J1 perd !

Si J1 joue 2 ➡ J2 joue 4 ➡ J1 perd !

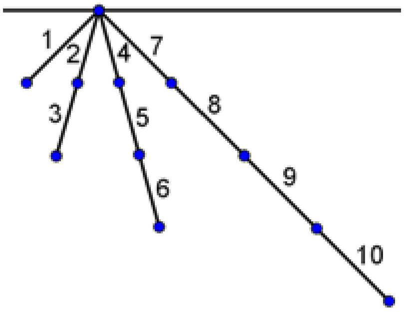
Si J1 joue 3 ➡ J2 joue 5 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 1 ou 4
J1 joue 1 ➡ J2 joue 4 ou 2
J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ou 1
J1 perd !

Si J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ➡ J1 perd !

Si J1 joue 5 ➡ J2 joue 3 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 1 ou 4
J1 joue 1 ➡ J2 joue 4 ou 2
J1 joue 4 ➡ J2 joue 2 ou 1
J1 perd !

Si J1 joue 6 ➡ J2 joue 1 ➡ J1 joue 2 ➡ J2 joue 5
J1 joue 3 ➡ J2 joue 4
J1 joue 4 ➡ J2 joue 3
J1 joue 5 ➡ J2 joue 2
J1 perd !

D) L'éventail 4

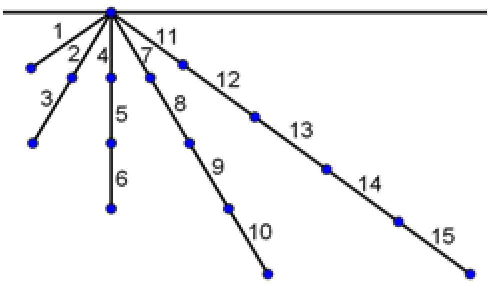


Configuration A

Stratégie gagnante :

Le premier joueur doit enlever la ficelle 7 ; on se retrouve dans le cas précédent sauf que c'est le second joueur qui commence.

E) L'éventail 5



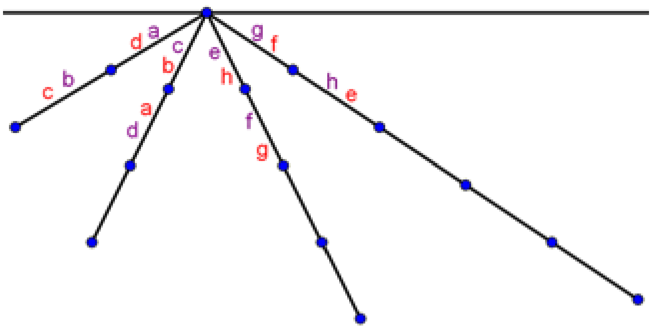
Configuration A

Stratégie gagnante : Le premier joueur doit enlever la ficelle 1.

Si le joueur 2 joue « en haut », c'est-à-dire sur les ficelles : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ou 12, alors le joueur 1 joue selon le dessin ci-contre en rouge.

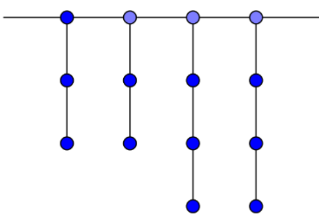
Ainsi, il se ramène à l'éventail 3 ou aux 3 chaines (1 ; 4 ; 5) qui sont des configurations B que le joueur 2 joue en premier.

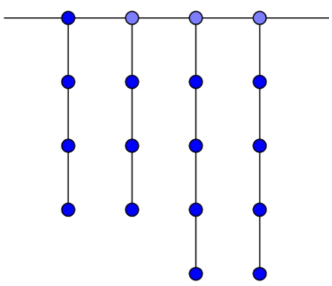
Donc, le joueur 1 gagne.



Les réponses de J1 selon ce que joue J2

Si le joueur 2 joue « en bas », c'est-à-dire sur les ficelles : 6 ; 9 ;10 ; 13 ; 14 ou 15, alors le joueur 1 joue en face (stratégie miroir) pour se ramener aux configurations B suivantes où le joueur 2 va jouer en premier :



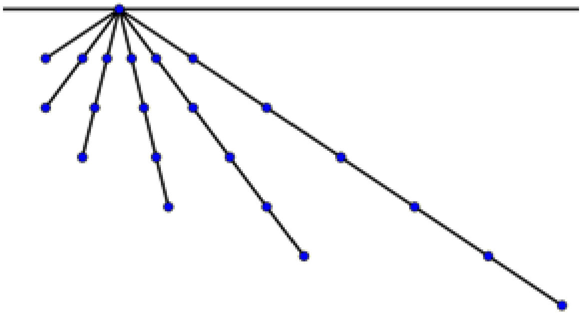


En effet en jouant en face, le joueur 1 va soit obliger le joueur 2 à jouer deux chaines de même longueur soit trois chaines de longueur 1.

Ainsi, le joueur 1 gagne l'éventail 5. C'est donc une **<u>configuration A</u>**

Conclusion : On avait conjecturé que les éventails suivaient la suite ABABAB…. Or ce n'est pas le cas !!!

F) L'éventail 6



On n'a pas cherché le 6 : c'était trop difficile car il comporte trop de possibilités. En effet, le premier joueur peut jouer 21 ficelles, le joueur 2 au maximum a 20 ficelles à jouer etc…

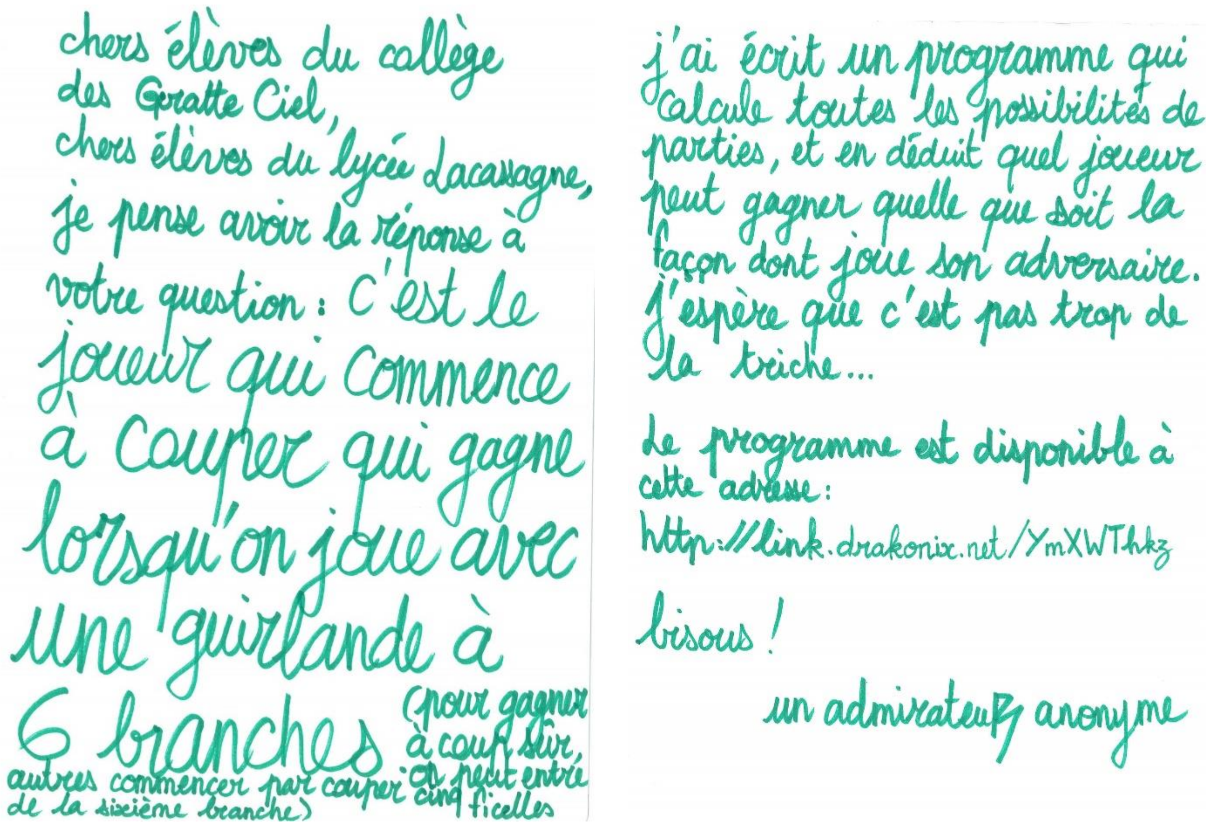
Le nombre maximum de parties est de :

$$21 \times 20 \times 19 \times \ldots \times 2 \times 1 = 51090942171709440000$$

<u>Une solution</u> : la lettre anonyme

Un chercheur a envoyé la lettre ci-dessous, expliquant qu'il avait trouvé la solution de cet éventail à l'aide d'un programme disponible à ce lien : http://link.drakonix.net/YmXWThkz

C'est donc une **Configuration A**.



chers élèves du collège des Gratte Ciel,
chers élèves du lycée Lacassagne,
je pense avoir la réponse à votre question : C'est le joueur qui commence à couper qui gagne lorsqu'on joue avec une guirlande à 6 branches (pour gagner à coup sûr, on peut entre autres commencer par couper cinq ficelles de la sixième branche)

j'ai écrit un programme qui calcule toutes les possibilités de parties, et en déduit quel joueur peut gagner quelle que soit la façon dont joue son adversaire. J'espère que c'est pas trop de la triche...

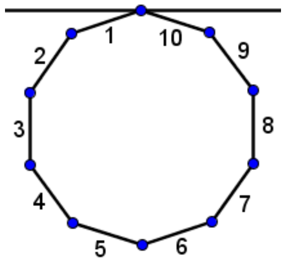
Le programme est disponible à cette adresse :
http://link.drakonix.net/YmXWThkz

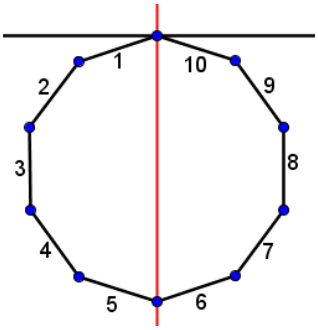
bisous !

un admirateur anonyme

Les colliers

1. Collier simple avec un nombre pair de ficelles



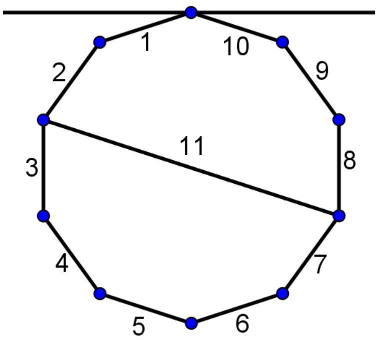


Pour jouer, nous avons tracé un axe de symétrie axiale.

- Si J1 joue en 1 (ou 10), alors J2 joue en 9 (ou 2). J2 gagne.
- Si J1 joue en 2 (ou 9), alors J1 joue en 10 (ou 1). J2 gagne.
- Sinon, où que joue J1, J2 joue en face (donc en symétrie) jusqu'à arriver sur les ficelles précédentes. Là on se retrouve au cas précédent, et J2 gagne.

C'est donc une **configuration B**.

2. Collier à une corde

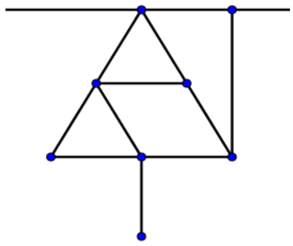


Pour trouver si c'est une configuration A ou B, nous avons raisonné de la façon suivante : si le 1er joueur retire la ficelle n°11, on se retrouve alors avec la configuration B précédente et comme c'est le 2ème joueur qui commence, il perd.

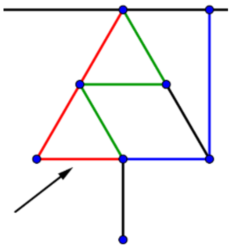
C'est donc une **configuration A**.

La partie la plus longue

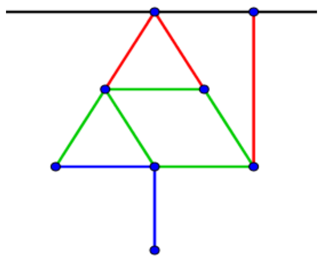
Ici, la consigne est différente : étant donnée une configuration, comment faire pour que la partie dure le plus longtemps possible ?



Pour faire la partie la plus longue il faut savoir mesurer la distance du plafond à une ficelle choisie, notion que nous avons introduite.
Pour cela il faut savoir ce qu'est un chemin. Un chemin, c'est une suite de boules et de ficelles partant du plafond et allant jusqu'à l'une des deux boules de la ficelle choisie. La longueur d'un chemin correspond au nombre de boules qui s'y trouvent.



Chaque ficelle peut être reliée au plafond par une multitude de chemins différents. Par exemple, la ficelle désignée par la flèche ci-contre, est reliée au plafond par le chemin rouge (de longueur 3 ou 4), le chemin vert (de longueur 4 ou 5) et le chemin bleu (de longueur 3 ou 4).
Parmi tous ces chemins, on choisit celui dont la longueur est la plus courte. Cette longueur correspond alors à la distance de la ficelle au plafond. (Sur l'exemple, la ficelle est à une distance 3 du plafond).



Lorsqu'une configuration nous est donnée, on doit calculer la distance au plafond de chacune des ficelles de la configuration. Pour que la partie dure le plus longtemps possible, la stratégie est alors de retirer systématiquement la ficelle dont la distance au plafond est la plus grande.
Par exemple, sur la figure ci-contre, il faut d'abord retirer les ficelles bleues (à distance 3 du plafond), puis les ficelles vertes (à distance 2) et enfin les ficelles rouges (à distance 1).