## Solution énigme n°1 (le château de cartes)

Partons de l'exemple du château à 3 étages. Les 15 cartes nécessaires peuvent être comptabilisées méthodiquement comme ceci :

**Etage 1 (tout en bas) :** 3 paires de cartes (pour faire les V à l'envers) + 2 cartes à plat, soit : $3 \times 2 + 2$

**Etage 2 :** 2 paires de cartes (pour faire les V à l'envers) + 1 carte à plat, soit : $2 \times 2 + 1$

**Etage 3 (tout en haut) :** 1 paire de cartes (pour faire le V à l'envers) + 0 carte à plat, soit : $1 \times 2 + 0$

**On additionne tout cela :**

$$\underbrace{3 \times 2 + 2}_{\text{étage } 1} + \underbrace{2 \times 2 + 1}_{\text{étage } 2} + \underbrace{1 \times 2 + 0}_{\text{étage } 3}$$

Puis on « réorganise » ce calcul :

$3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 2 + 2 + 1 + 0$

$= (3 + 2 + 1) \times 2 + (2 + 1 + 0)$

$= (1 + 2 + 3) \times 2 + (1 + 2)$

(Cela donne bien 15 cartes au total.)

Ainsi, pour un château à 12 étages, le même raisonnement conduit au calcul suivant :

$(1 + 2 + 3 + \cdots + 12) \times 2 + (1 + 2 + \cdots + 11)$

Ce qui donne (avec la calculatrice) : $78 \times 2 + 66 = 156 + 66 = 222$ cartes.

Et pour un château à $n$ étages ? Le même raisonnement conduit à :

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \times 2 + (1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

Si vous êtes en Première ou en Terminale, vous devez savoir que : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par conséquent, on a également : $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Ainsi :

$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \times 2 + \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2} \times 2 + \dfrac{(n-1)n}{2}$

$= \dfrac{2n(n+1) + (n-1)n}{2}$

$= \dfrac{2n^2 + 2n + n^2 - n}{2}$

$= \dfrac{3n^2 + n}{2}$

$= \dfrac{n(3n+1)}{2}$